

Risoluzione del compito di febbraio 2009

Esercizio 1

Siano a disposizione i seguenti due titoli obbligazionari:

$$z_1 = (-97,5 ; 100) / (0 ; 1)$$

$$z_2 = (-104,30 ; 5 ; 5 ; 105) / (0 ; 1 ; 2 ; 3)$$

Calcolare le quote di composizione ed il prezzo di un portafoglio che immunizza un'unica uscita all'epoca 2 pari a Euro 10.000, sapendo che le cedole sono tassate al 12,5% e che il tasso di mercato è 2,5% annuo.

Risoluzione.

Se teniamo conto della tassazione delle cedole, lo scadenziario del secondo titolo diventa

$$z_2 = (-104,30 ; 4,375 ; 4,375 ; 104,375) / (0 ; 1 ; 2 ; 3)$$

Per la risoluzione completa, si rimanda ad altri quesiti simili. Abbiamo un problema con una sola uscita di conseguenza dovremo utilizzare il vincolo di bilancio ed il vincolo di duration.

Per effetto di questi due vincoli, il valore attuale delle entrate è $V_0 = 9.518,144$ mentre la duration delle entrate è pari a due.

Esercizio 2

Il portafoglio di un investitore è composto di 520 azioni della società A e un pari numero di opzioni Put sulle azioni A. Sapendo che l'azione quota oggi Euro 1,39, lo strike price della put è fissato a Euro 0,9, la scadenza è fissata a 3 anni, il tasso risk free è il 2% e che $u = +10\%$ e $d = -20\%$, calcolare:

- Il valore del portafoglio oggi;
- I valori a scadenza del portafoglio in tutti i casi possibili;
- Il valore atteso di portafoglio.

Risoluzione.

I fattori di rialzo e ribasso valgono rispettivamente $u = 1,10$ e $d = 0,80$.

Determiniamo i valori a scadenza ($T = 3$) del sottostante:

$$A_{uuu} = A \cdot u^3 = 1,8501$$

$$A_{uud} = A \cdot u^2 \cdot d = 1,3455$$

$$A_{udd} = A \cdot u \cdot d^2 = 0,9786$$

$$A_{ddd} = A \cdot d^3 = 0,7117$$

I pay off a scadenza della put valgono rispettivamente:

$$P_{uuu} = \max(K - A_{uuu}; 0) = 0$$

$$P_{uud} = \max(K - A_{uud}; 0) = 0$$

$$P_{udd} = \max(K - A_{udd}; 0) = 0$$

$$P_{ddd} = \max(K - A_{ddd}; 0) = 0,1883$$

mentre la probabilità risk neutral vale:

$$\pi = \frac{1+i-d}{u-d} = 0,7333 \rightarrow 73,33\%$$

Possiamo ora calcolare il prezzo dell'opzione put:

$$P = \frac{\pi^3 \cdot P_{uuu} + 3\pi^2 \cdot (1-\pi) \cdot P_{uud} + 3\pi \cdot (1-\pi)^2 \cdot P_{udd} + (1-\pi)^3 \cdot P_{ddd}}{(1+i)^3} = 0,003365$$

Il valore del portafoglio all'epoca *zero* si ottiene sommando al prezzo del sottostante il prezzo dell'opzione (per il numero di quote):

$$V_0 = 520 \cdot (A + P) = 724,55$$

Il valore all'epoca *tre* del portafoglio si ottiene sommando al valore a scadenza del sottostante il valore dell'opzione (ossia il suo pay off), nei quattro percorsi aleatori possibili:

$$V_3(uuu) = A_{uuu} + P_{uuu} = 962,05$$

$$V_3(uud) = A_{uud} + P_{uud} = 699,67$$

$$V_3(udd) = A_{udd} + P_{udd} = 508,85$$

$$V_3(ddd) = A_{ddd} + P_{ddd} = 468,00$$

Infine, il valore atteso del portafoglio è:

$$V_3(att) = \pi^3 \cdot V_3(uuu) + 3\pi^2 \cdot (1-\pi) \cdot V_3(uud) + 3\pi \cdot (1-\pi)^2 \cdot V_3(udd) + (1-\pi)^3 \cdot V_3(ddd) = 768,90$$

Esercizio 3

Dal Sole 24 Ore del 7 febbraio 2009 (quotazioni del 6) si evince che un BTP che scade il 1.08.2017 paga una cedola annua di 5,25 frazionata semestralmente. Sapendo che il tasso di mercato è il 4,85% calcolare il prezzo del titolo sapendo che esso è il 3% inferiore al suo valore.

Risoluzione.

Il numero totale di cedole è pari a 17 (ciascuna pari a 2,625), la prima delle quali è corrisposta il 1.08.2009. Posto $i = 0,0485$, il prezzo si ottiene dalla seguente formula:

$$P = 0,97 \cdot (1+i)^{5/365} \cdot \left(2,625 \cdot a_{\overline{17}|i_{1/2}} + 100 \cdot (1+i)^{-8,5} \right) = 100,133$$

Osserviamo che la successione delle cedole costituisce una rendita anticipata di cinque giorni, per questo motivo abbiamo moltiplicato il valore attuale delle cedole per il fattore di montante $(1+i)^{5/365}$.

Esercizio 4

Un individuo ottiene un prestito personale di Euro 20.000 che deve restituire in 11 rate semestrali mediante un ammortamento francese al tasso dell'8% annuo.

Dopo un anno e mezzo ha la possibilità di ottenere un finanziamento da parte di un altro istituto di credito al tasso agevolato del 4,5% annuo. Decide di accedervi per rimborsare anticipatamente l'80% del debito residuo del finanziamento che ha in corso.

Calcolare il nuovo debito residuo e la nuova rata del primo finanziamento dopo che avviene il rimborso parziale. Calcolare inoltre la rata del finanziamento agevolato sapendo che viene applicato un ammortamento francese con rate semestrali e che tale ammortamento scade contemporaneamente all'altro.

Risoluzione.

Il tasso semestrale equivalente è $i_{1/2} = \sqrt{1+i} - 1 = 0,03923$.

La rata dell'ammortamento iniziale è $R = \frac{20.000}{a_{\overline{11}|i_{1/2}}} = 2.273,52$. Di conseguenza, il debito residuo dopo un anno e mezzo (quando mancano ancora otto rate) vale

$$D(1,5) = R \cdot a_{\overline{8}|i_{1/2}} = 15.355,8$$

Il nuovo debito residuo sarà perciò $D'(1,5) = 0,20 \cdot D(1,5) = 3.071,15$ e la nuova rata del primo finanziamento si ottiene dalla seguente formula:

$$\hat{R} = \frac{D'(1,5)}{a_{\overline{8}|i_{1/2}}} = 454,703$$

Prima di calcolare la rata del nuovo finanziamento, determiniamo il nuovo tasso semestrale equivalente. Si ha $j_{1/2} = \sqrt{1+j} - 1 = 0,02225$.

Si ottiene perciò:

$$\tilde{R} = \frac{0,8 \cdot D(1,5)}{a_{\overline{8}|j_{1/2}}} = 1.693,29$$

Esercizio 5

Data la seguente forza d'interesse (intensità istantanea di interesse)

$$\delta(t) = \frac{e^t + 1}{200}$$

- Calcolare il prezzo di una obbligazione che paga cedole annue pari al 4% del valore nominale e rimborsa il capitale alla pari dopo tre anni.
- Calcolare il TIR di detta obbligazione in caso di reinvestimento dei flussi intermedi al 4,5% in capitalizzazione composta.

Risoluzione.

Si tratta di un quesito già proposto in precedenza perciò ci limitiamo al calcolo del fattore di montante e di sconto.

L'integrale della forza d'interesse è:

$$\int_0^t \delta(s) ds = \int_0^t \frac{e^s + 1}{200} ds = \frac{1}{200} \cdot \int_0^t (e^s + 1) ds = \frac{1}{200} \cdot [e^s + s]_0^t = \frac{e^t + t - e^0}{200} = \frac{e^t + t - 1}{200}$$

Di conseguenza il fattore di montante vale:

$$r(t) = e^{\frac{e^t + t - 1}{200}}$$

Infine, il fattore di sconto $v(t) = r(t)^{-1}$ per le scadenze richieste vale:

$$\begin{cases} v(1) = 0,9865 \\ v(2) = 0,9589 \\ v(3) = 0,8955 \end{cases}$$

Esercizio 6

Un individuo possiede un appartamento che affitta percependo al termine di ogni mese 550 Euro. Tale somma viene in parte consumata e per il 40% versata in un c/c bancario che rende il 4,5% annuo.

Calcolare il montante che tale individuo accumula dopo 2 anni.

Calcolare quale sarebbe il montante dopo 2 anni se alla fine del primo anno l'affitto aumentasse del 10% e contemporaneamente la banca diminuisse il rendimento annuo del c/c di mezzo punto percentuale.

Risoluzione.

L'importo versato ogni mese sul c/c è pari a $550 \cdot 0,4 = 220$ mentre il tasso mensile equivalente al 4,5% annuo è $i_{1/12} = 1,045^{1/12} - 1 = 0,003675$.

Il montante dopo 2 anni vale perciò:

$$M(2) = 220 \cdot s_{\overline{24}|i_{1/12}} = 5.509,27$$

Nella seconda ipotesi, il tasso dopo un anno diventa $j = 0,04$; il tasso mensile equivalente sarà $j_{1/12} = 1,04^{1/12} - 1 = 0,003274$.

Il montante dopo due anni si può scrivere come la somma di due termini:

$$M'(2) = 220 \cdot s_{\overline{12}|i_{1/12}} \cdot (1 + j) + (220 \cdot 1,1) \cdot s_{\overline{12}|j_{1/12}} = 220 \cdot s_{\overline{12}|i_{1/12}} \cdot 1,04 + 242 \cdot s_{\overline{12}|j_{1/12}} = 5.758,64$$

Il primo termine rappresenta il montante all'epoca uno capitalizzato fino all'epoca due col nuovo tasso; il secondo termine rappresenta il montante delle ultime 12 rate (rivalutate) calcolato col nuovo tasso.